Niedersächsisches
Kultusministerium

Erarbeitet von der Kommission des Kerncurriculums für das Fach Mathematik im Sekundarbereich II (2018)

Ergänzende Materialien zum Kerncurriculum für
das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe
die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe
das Berufliche Gymnasium
das Abendgymnasium
das Kolleg

Mathematik

Niedersachsen

Geradengleichungen im Zweidimensionalen in Parameter-, Normalen- und Koordinatenform:

Hier geht es darum, die in der Sekundarstufe II behandelten Formen der Geradengleichung mit der aus früheren Schuljahrgängen bekannten Form, nämlich mit $y = m \cdot x + n$, zu vernetzen. Diese lässt sich nur für Geraden verwenden, die nicht zur y-Achse parallel sind. Außerdem lässt sich diese Form nicht übertragen auf Geraden im dreidimensionalen Raum.

Ist $P = (x;\ y)$ ein allgemeiner Punkt auf der Geraden, so ist

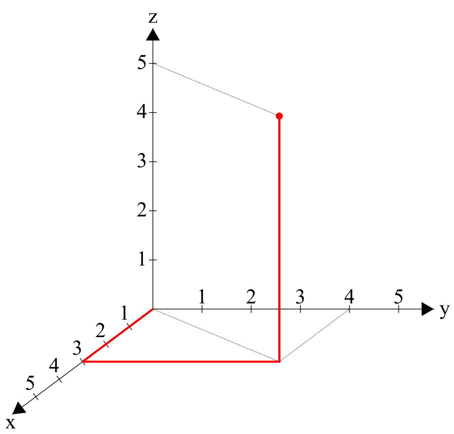
$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ m \cdot x + n \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ die zugehörige Parameterform.

Die Geradengleichung $y = m \cdot x + n$ lässt sich auch schreiben als $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = n$; dies ist die zugehörige Normalenform.

Die Gleichung $-m \cdot x + y = n$ ist die zugehörige Koordinatenform.

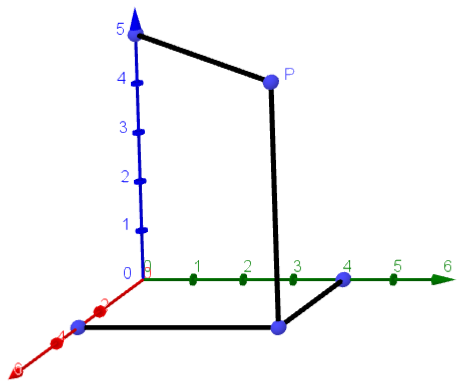
Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen:

Zeigt die x-Achse nach vorn, die y-Achse nach rechts und die z-Achse nach oben, so bekommt man ein *Schrägbild* eines Punktes $P = (u;\ v;\ w)$, indem man v und w unverzerrt einträgt und die x-Koordinate u verkürzt nach vorn einträgt. Das Bild zeigt die Vorgehensweise für den Punkt $P = (3;\ 4;\ 5)$.



Wie erzeugt man das letzte Bild in GeoGebra?

Zunächst muss man in Einstellungen/Erweitert/Eigenschaften 3D/Projektion einstellen, dass ein *Schräg*bild erzeugt werden soll. Dann gibt man den Punkt P als P(3,4,5) ein.



Zur Abbildung:

Der Punkt $(1;\ 0;\ 0)$ wird auf den Punkt $(a;\ b)$ abgebildet, wobei a und b davon abhängen, unter welchem Winkel die x-Achse gegenüber der y-Achse abgebildet werden soll und wie die Verkürzung sein soll. Die Punkte $(0;\ 1;\ 0)$ und $(0;\ 0;\ 1)$ werden auf $(1;\ 0)$ bzw. $(0;\ 1)$ abgebildet. Genau das leistet die Matrix $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wegen

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline a & 1 & 0 & a \\ b & 0 & 1 & b \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ \hline a & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

bzw. wegen $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Punkt $P = (3;\ 4;\ 5)$ wird mit der Matrix $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wegen

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & 4 \\ & & & 5 \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \end{array}$$

bzw. wegen $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf den Punkt

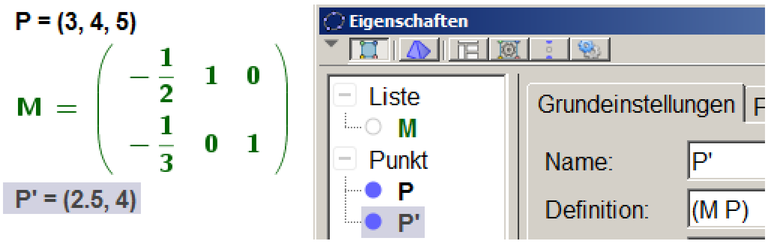
$P' = \left(-\frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5;\ -\frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \right) = (2{,}5;\ 4)$ abgebildet.

Zur Realisierung in GeoGebra:

Durch OP=vektor(P) wird aus dem Punkt P der zugehörige Ortsvektor in Spaltenschreibweise. Die Matrix gibt man als

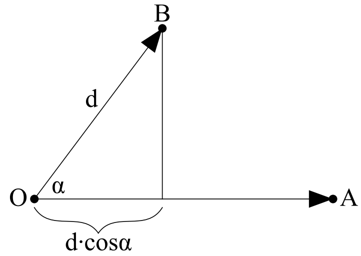
M = {{-1 / 2, 1, 0}, {-1/3, 0, 1}}

ein (oder über die Tabelle). Mit M*OP bekommt man den Punkt(!!!) (2,5; 4). Auch der matrizentheoretisch eigentlich unsinnige Befehl M*P führt zu (2,5; 4):



<u>Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten</u>:

Es gilt $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos\alpha$, wenn α der von $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ eingeschlossene Winkel ist.
In der von O, A und B gebildeten Ebene hat man also nebenstehende Situation.



Das Skalarprodukt ist also Länge des ersten Vektors mal Länge der Projektion des zweiten Vektors auf den ersten.

<u>Was hat man davon?</u>

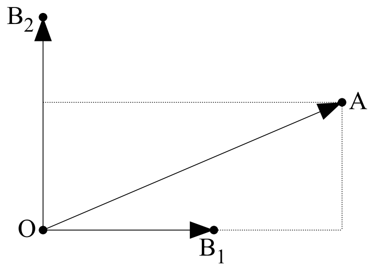
$\boxed{1.}$ Wenn man das Skalarprodukt einführt, indem man $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$ für zueinander parallele Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ für zueinander orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$ als Zwischenlösung fordert sowie das Distributivgesetz $\vec{a}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}\right)=\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_1}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_2}$ voraussetzt, so gilt für

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ und

$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b_2\end{pmatrix}=\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}$

die Koordinatendarstellung

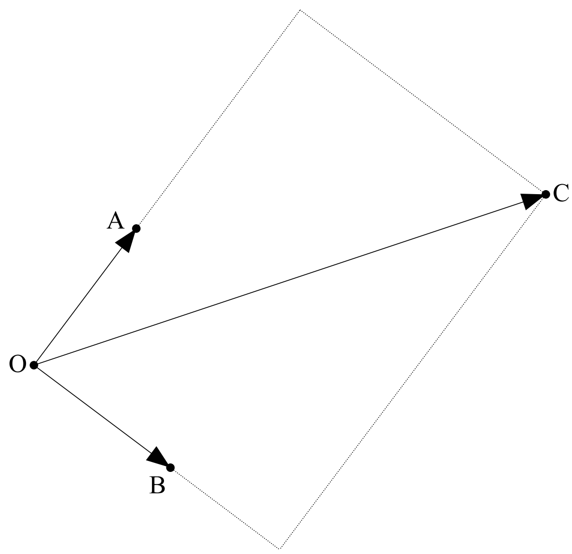
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB_2}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$.



Im dreidimensionalen Raum verläuft die Argumentation analog.

$\boxed{2.}$ Die beiden Vektoren $\vec{a}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}$ und $\vec{b}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{OB}$ sind zueinander orthogonal, und beide haben die Länge 1.

Will man etwa den Vektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{OC}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schreiben, d.h. als $\vec{c}=s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}$ mit geeigneten s und t, so muss man die reellen Zahlen s und t finden.
Rechnerisch multipliziert man $\vec{c}=s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}$ mit $\vec{a}$ und erhält $\vec{c}\cdot\vec{a}=s\cdot\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}}_{=1}+t\cdot\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}_{=0}=s$ und außerdem mit $\vec{b}$, um analog $\vec{c}\cdot\vec{b}=t$ zu erhalten. Zeichnerisch hat man das nebenstehende Bild.



Darstellung des letzten Bilds mit GeoGebra:

Man gibt zunächst die Punkte ein als

O = (0,0), A = (3, 4)/5, B = (4, -3)/5, C = (3, 1),

dann die (Orts-)Vektoren als

u = Vektor(A), v = Vektor(B), w = Vektor(C).

Mit

s = u*w und t = v*w

liefert der Aufruf

s*u + t*v

dann den Vektor w.